

二次函数最值问题独当一面

1. 2020~2021学年福建厦门集美区集美中学初三上学期期中第25题13分 ★★★

已知二次函数 $y = x^2 + bx + c$ (b, c 为常数) .

(1) 若二次函数图象的顶点坐标为 $(-1, -2)$, 求 b 和 c 的值 .

(2) 当 $c = \frac{1}{4}b^2 - 2$ 时 .

① 若对于任意实数 t , 坐标系中的点 $P(t-1, 2t-6)$ 总不在该函数图象上 , 求 b 的取值范围 .

② 自变量 x 的值满足 $b \leq x \leq b+1$ 时 , 函数 y 的最大值是 6 , 求此时 b 的值 .

【答案】 (1) $b = 2, c = -1$.

(2) ① $b > -1$.

$$\text{② } -\frac{4\sqrt{3}}{3} \text{ 或 } -\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{3}}{3} .$$

【解析】 (1) $\because$ 二次函数图象的顶点坐标为 $(-1, -2)$,

$$\therefore y = (x+1)^2 - 2 ,$$

$$\therefore y = x^2 + 2x - 1 ,$$

$$\therefore b = 2, c = -1 .$$

(2) ① $\because$ 点 P 的坐标为 $(t-1, 2t-6)$,

$$\text{令 } t-1 = x, 2t-6 = y ,$$

$$\therefore t = x+1 ,$$

$$\therefore y = 2(x+1) - 6 = 2x - 4 ,$$

$\therefore$ 点 $P(t-1, 2t-6)$ 在直线 $y = 2x - 4$ 上 ,

$\because$ 点 P 不在函数 $y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2$ 图象上 ,

$\therefore$ 直线 $y = 2x - 4$ 与抛物线 $y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2$ 没有交点 ,

$$\therefore \text{联立 } \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2 \end{cases} ,$$

$$\therefore x^2 + (b-2)x + \frac{1}{4}b^2 + 2 = 0 ,$$

$$\therefore \Delta = (b-2)^2 - 4 \times 1 \times \left(\frac{1}{4}b^2 + 2\right) < 0 ,$$

$$\text{整理得 : } b^2 - 4b + 4 - b^2 - 8 < 0 ,$$

$$4b > -4 ,$$

$$b > -1 ,$$

$\therefore b$ 的取值范围是 $b > -1$.

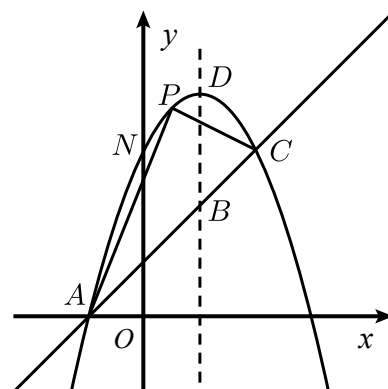
$$\text{② } \because y = x^2 + bx + \frac{1}{4}b^2 - 2 = \left(x + \frac{1}{2}b\right)^2 - 2 ,$$

$$\begin{aligned}
&\therefore \text{抛物线对称轴为 } x = -\frac{1}{2}b, \\
&\text{当 } -\frac{b}{2} \leq \frac{b+b+1}{2} \text{ 时,} \\
&\text{即 } b \geq -\frac{1}{3} \text{ 时, 当 } x = b+1 \text{ 时取得最大值,} \\
&\left(b+1+\frac{1}{2}b\right)^2 - 2 = 6, \\
&\left(\frac{3}{2}b+1\right)^2 = 8, \\
&\frac{3}{2}b+1 = \pm 2\sqrt{2}, \\
&\frac{3}{2}b = -1 \pm 2\sqrt{2}, \\
&b = -\frac{2}{3} \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \\
&b_1 = -\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}, \quad b_2 = -\frac{2}{3} - \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (舍)}, \\
&\text{即 } b < -\frac{1}{3} \text{ 时, 当 } x = b \text{ 时取得最大值,} \\
&\therefore \left(b+\frac{1}{2}b\right)^2 - 2 = 6, \\
&\therefore \left(\frac{3}{2}b\right)^2 = 8, \\
&\therefore \frac{9}{4}b^2 = 8, \\
&\therefore b^2 = \frac{32}{9}, \\
&\therefore b = \pm \frac{4\sqrt{2}}{3}, \\
&\therefore b_1 = -\frac{4\sqrt{2}}{3}, \quad b_2 = \frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ (舍)}, \\
&\therefore b \text{ 的值为 } -\frac{4\sqrt{2}}{3} \text{ 或 } -\frac{2}{3} + \frac{4\sqrt{2}}{3}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】定直线（线段）与动抛物线交点问题

2. 2020~2021学年江苏苏州工业园区东沙湖实验中学初三上学期期中第27题12分 ★★★★★

如图，抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 与一直线相交于 $A(-1, 0)$ ， $C(2, 3)$ 两点，与 y 轴交于点 N ，其顶点为 D 。



(1) 求抛物线及直线 AC 的函数表达式。

(2) 如图，点 P 为抛物线 $y = -x^2 + bx + c$ 上任意一点且处于 AC 上方，求三角形 PAC 面积的最大值。

(3) 设点 $M(3, m)$, 求使 $MN + MD$ 的值最小时 m 的值.

(4) 若抛物线的对称轴与直线 AC 相交于点 B , E 为直线 AC 上的任意一点, 过点 E 作 $EF \parallel BD$ 交抛物线于点 F , 以 B, D, E, F 为顶点的四边形能否为平行四边形? 若能, 求点 E 的坐标; 若不能, 请说明理由.

【答案】 (1) $y = -x^2 + 2x + 3$, $y = x + 1$.

(2) $\frac{27}{8}$.

(3) $\frac{18}{5}$.

(4) 能, $(0, 1)$, $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

【解析】 (1) $\therefore$ 将点 A 和点 C 的坐标代入抛物线的解析式得: $\begin{cases} -1 - b + c = 0 \\ -4 + 2b + c = 3 \end{cases}$,

解得: $b = 2$, $c = 3$,

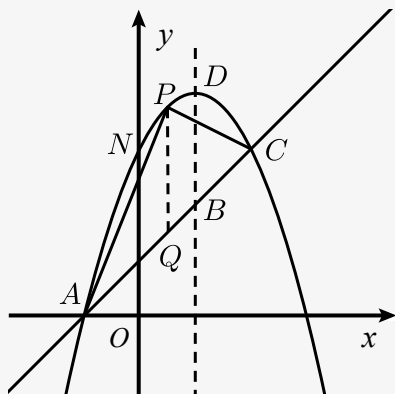
$\therefore$ 抛物线的解析式为 $y = -x^2 + 2x + 3$,

设直线 AC 的解析式为 $y = kx + b$,

$\therefore$ 将点 A 和点 C 的坐标代入得 $\begin{cases} -k + b = 0 \\ 2k + b = 3 \end{cases}$, 解得 $k = 1$, $b = 1$,

$\therefore$ 直线 AC 的解析式为 $y = x + 1$.

(2) 如图,



设点 $P(m, -m^2 + 2m + 3)$,

$\therefore Q(m, m + 1)$,

$\therefore PQ = (-m^2 + 2m + 3) - (m + 1)$

$= -m^2 + m + 2 = -\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}$,

$\therefore S_{\triangle APC} = \frac{1}{2}PQ \times |x_C - x_A|$

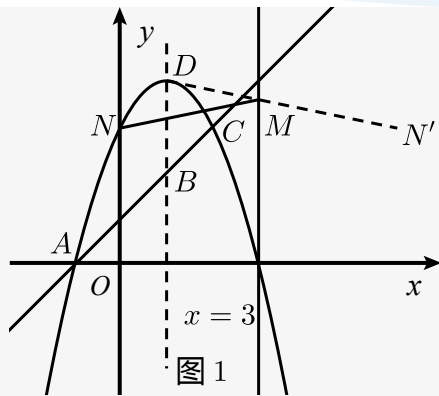
$= \frac{1}{2} \left[-\left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4} \right] \times 3 = -\frac{3}{2} \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{27}{8}$,

$\therefore$ 当 $m = \frac{1}{2}$ 时, $S_{\triangle APC \text{ 最大}} = \frac{27}{8}$, $y = -m^2 + 2m + 3 = \frac{15}{4}$,

$\therefore P\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{4}\right)$.

(3) 如图 1 所示,

过点 N 与直线 $x = 3$ 的对称点 N' , 连接 DN' , 交直线 $x = 3$ 与点 M ,



∴当 $x = 0$ 时 $y = 3$,

∴ $N(0, 3)$,

∴点 N 与点 N' 关于 $x = 3$ 对称 ,

∴ $N'(6, 3)$,

∴ $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$,

∴ $D(1, 4)$,

设 DN 的解析式为 $y = kx + b$,

将点 N' 与点 D 的坐标代入得 : $\begin{cases} 6k + b = 3 \\ k + b = 4 \end{cases}$,

解得 : $k = -\frac{1}{5}$, $b = \frac{21}{5}$,

∴直线 DN' 的解析式为 $y = -\frac{1}{5}x + \frac{21}{5}$,

当 $x = 3$ 时 , $m = -\frac{3}{5} + \frac{21}{5} = \frac{18}{5}$.

(4) ∴ $y = -x^2 + 2x + 3 = -(x - 1)^2 + 4$,

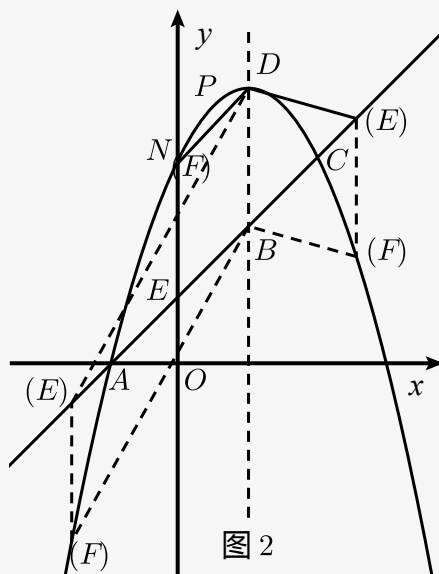
∴点 D 的坐标为 $(1, 4)$,

当 $x = 1$ 时 , $y = x + 1 = 2$,

∴点 B 的坐标为 $(1, 2)$,

设点 E 的坐标为 $(x, x + 1)$,

分两种情况考虑 (如图 2) :



①当点 E 在线段 AC 上时 , 点 F 在点 E 上方 ,

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(x, x+3)$,

$\therefore$ 点 F 在抛物线上,

$$\therefore x+3 = -x^2 + 2x + 3,$$

解得: $x_1 = 0, x_2 = 1$ (舍去),

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(0, 1)$;

②当点 E 在线段 AC (或 CA) 延长线上时, 点 F 在点 E 下方,

$\therefore$ 点 F 的坐标为 $(x, x-1)$.

$\therefore$ 点 F 在抛物线上,

$$\therefore x-1 = -x^2 + 2x + 3,$$

$$\text{解得: } x_1 = \frac{1-\sqrt{17}}{2}, x_2 = \frac{1+\sqrt{17}}{2},$$

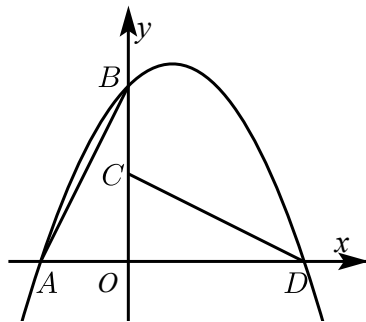
$\therefore$ 点 E 的坐标为 $\left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

综上: 满足条件的点 E 的坐标为 $(0, 1), \left(\frac{1-\sqrt{17}}{2}, \frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)$ 或 $\left(\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)$.

【标注】【知识点】二次函数与平行四边形

3. ★★★

如图所示, 在平面直角坐标系中, $\text{Rt}\triangle AOB$ 的顶点坐标分别为 $A(-2, 0), O(0, 0), B(0, 4)$, 把 $\text{Rt}\triangle AOB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转 90° , 得到 $\triangle COD$.



(1) 求 $C、D$ 两点的坐标.

(2) 求经过 $A、B、D$ 三点的抛物线的解析式.

(3) 在(2)中抛物线的对称轴上取两点 $E、F$ (点 E 在点 F 的上方), 且 $EF = 1$, 使四边形 $ACEF$ 的周长最小, 求出 $E、F$ 两点的坐标.

【答案】 (1) C 点的坐标是 $(0, 2)$, D 点的坐标是 $(4, 0)$.

$$(2) y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4.$$

(3) 点 E 的坐标为 $\left(1, \frac{7}{4}\right)$, 点 F 的坐标为 $\left(1, \frac{3}{4}\right)$.

【解析】 (1) 由旋转的性质可以知道: $OC = OA = 2, OD = OB = 4$,

$\therefore C$ 点的坐标是 $(0, 2)$, D 点的坐标是 $(4, 0)$.

(2) 设所求抛物线的解析式为 $y = ax^2 + bx + c$,

$$\text{根据题意, 得 } \begin{cases} 4a - 2b + c = 0 \\ c = 4 \\ 16a + 4b + c = 0 \end{cases} ,$$

计算得出 $a = -\frac{1}{2}$, $b = 1$, $c = 4$,

$\therefore$ 所求抛物线的解析式为 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$.

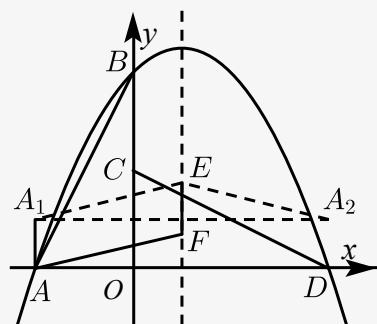
(3) 只需求 $AF + CE$ 最短 ,

抛物线 $y = -\frac{1}{2}x^2 + x + 4$ 的对称轴为 $x = 1$,

将点 A 向上平移至 $A_1(-2, 1)$, 则 $AF = A_1E$,

作 A_1 关于对称轴 $x = 1$ 的对称点 $A_2(4, 1)$,

连接 A_2C , A_2C 与对称轴交于点 E , F 为所求 ,



可求得 A_2C 的解析式为 $y = -\frac{1}{4}x + 2$,

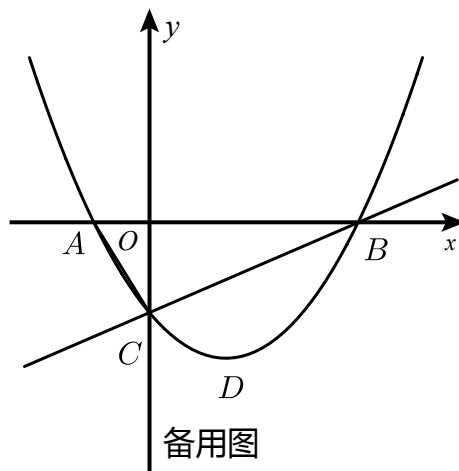
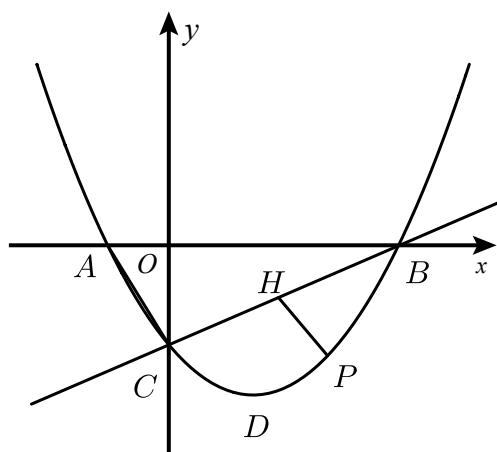
当 $x = 1$ 时 , $y = \frac{7}{4}$,

$\therefore$ 点 E 的坐标为 $(1, \frac{7}{4})$, 点 F 的坐标为 $(1, \frac{3}{4})$.

【标注】【知识点】二次函数与轴对称问题

4. 2019年重庆初三自主招生 ★★★★★

已知在平面直角坐标系中, 抛物线 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 与 x 轴交于 A , B 两点(点 A 在点 B 左侧), 与 y 轴交于点 C , 顶点为 D .



如图，直线 BC 下方抛物线上的一个动点 P (不与点 B, C 重合)，过点 P 作 $PH \perp BC$ 于点 H ，当 PH 最大时，点 E 为线段 BC 一点 (不与点 B, C 重合)，当 $PE + \frac{\sqrt{3}}{2}BE$ 的值最小时，求点 E 的坐标。

【答案】(1) 见解析

【解析】(1) 解：令 $y = 0$ ，即 $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} = 0$ ，

解得 $x_1 = -1, x_2 = 3$ ，

$\therefore A(-1, 0), B(3, 0)$ 。

令 $x = 0$ ，得 $y = -\sqrt{3}$ ，

$\therefore C(0, -\sqrt{3})$ 。

设直线 BC 的解析式为 $y = kx + b$ ，

$\therefore \begin{cases} 3k + b = 0 \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$ 解得 $\begin{cases} k = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ b = -\sqrt{3} \end{cases}$

$\therefore$ 直线 BC ； $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 。

设过点 P 且平行于 BC 的直线解析式为 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + m$ 。

当 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + m$ 与 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$ 只有一个交点时， PH 的值最大，由

$\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}x + m$ ，

得 $\frac{\sqrt{3}}{3}x^2 - \sqrt{3}x - \sqrt{3} - m = 0$ ，此方程有两个相等的实数根，

$\therefore x = -\frac{-\sqrt{3}}{2 \times \frac{\sqrt{3}}{3}} = \frac{3}{2}$ ，

此时 $y = -\frac{5\sqrt{3}}{4}$ ，

$\therefore P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right)$ 。

如图 1，将 BC 沿 x 轴翻折交 y 轴于点 S ，作 $EG \perp BS$ 于点 G ， $PK \perp BS$ 于点 K 。

$\therefore \tan \angle CBO = \frac{CO}{BO} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，

$\therefore \angle COB = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle SBO = \angle CBO = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle CBS = 60^\circ$ ，

$\therefore EG = BE \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}BE$ ，

$\therefore PE + \frac{\sqrt{3}}{2}BE = PE + EG$ ，

$\therefore$ 当 P, E, G 共线时， $PE + \frac{\sqrt{3}}{2}BE$ 的值最小，即为 PK 的值

$\therefore B(3, 0), S(0, \sqrt{3})$ ，

$\therefore$ 直线 BS ： $y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \sqrt{3}$ 。

$\therefore PK \perp BS$ ，

$\therefore$ 设直线 PK ： $y = \sqrt{3}x + n$ 。

$$\therefore P\left(\frac{3}{2}, -\frac{5\sqrt{3}}{4}\right),$$

$$\therefore \sqrt{3} \times \frac{3}{2} + n = -\frac{5\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore n = -\frac{11\sqrt{3}}{4},$$

$$\therefore \text{直线 } PK: y = \sqrt{3}x - \frac{11\sqrt{3}}{4}.$$

由 $y = \sqrt{3}x - \frac{11\sqrt{3}}{4}$ 和 $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \sqrt{3}$,

解得 $\begin{cases} x = \frac{21}{8} \\ y = -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{cases}$

$$\therefore E\left(\frac{21}{8}, -\frac{\sqrt{3}}{8}\right).$$

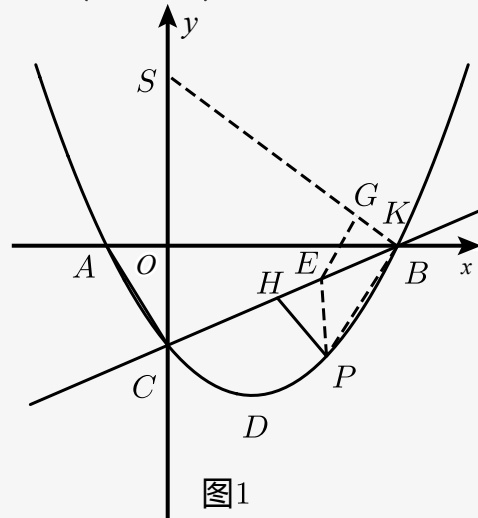


图1

【标注】【知识点】二次函数与等腰三角形结合